（2 次関数の大切さ＜夏期講習高 1 スーパー α 教材より＞）

$\boxed{1}$　次数係数の 4 次方程式

$$x^4 + px^3 + qx^2 + px + 1 = 0$$

が相異なる 4 つの実数解をを持つ条件を $p,\ q$ 求め，それを pq 平面上に図示せよ．

（2 次関数の大切さ＜慣れてきたら＞）

$\boxed{2}$　次の問いに答えよ．

(1) 方程式 $x^2 - ax - a + 2 = 0$ が正の 2 実数解をもつように a の値の範囲を定めよ．

(2) 不等式 $x > \dfrac{6}{x-1}$ を解け．

（答案作成指導の注意点＜採点基準を踏まえて＞）

2017 年度第 2 回高 1 全国模試大問 3 より

$\boxed{3}$ 1 から 9 までの数字が 1 つずつ記されたカードが 9 枚入った袋がある．この袋から 4 枚のカードを取り出して，右の表の同じ数字が書かれた番号の上に置く．このとき 4 枚のカードのうちのいずれか 3 枚が，縦，横，斜めの一列に並んだ場合「ビンゴ」と呼ぶことにする．

たとえば，取り出したカードが $1, 4, 5, 7$ の 4 枚であれば，$1, 4, 7$ の 3 枚が縦の一列に並ぶので「ビンゴ」となる．

1	2	3
4	5	6
7	8	9

(1) 4 枚のカードの取り出し方は何通りあるか．

(2) 取り出した 4 枚のカードの中に 5 のカードが入っている確率を求めよ．

(3) 「ビンゴ」となる確率を求めよ．

(4) 4 枚のカードの中に 1 と 5 のカードが入っていることがわかっているとき，その 4 枚のカードがビンゴになっている確率を求めよ．

(5) 4 枚のカードが「ビンゴ」になっていることがわかっているとき，その 4 枚のカードの中に 1 と 5 のカードが入っている確率を求めよ．

解答

(1) 9 枚のカードのうち，どの 4 枚を選ぶかの組み合わせを考えて，

$_9\mathrm{C}_4 = 126$ (通り) ……(答) これらは，すべて同じ確からしさで起こることに注意する． ……(∗)

(2) 9 枚のカードのうち，5 以外の 8 枚のカードの中から，残り 3 枚のカードを選ぶ方法は $_8\mathrm{C}_3 = 56$ (通り) である．よって，求める確率は (∗) に注意して，

$$\frac{56}{126} = \frac{4}{9}$$

……(答) である．

(3) 「ビンゴ」となるのは，4 枚のカードのうちのいずれか 3 枚が一列に並ぶときである．3 枚のカードが一列に並ぶのは，

(i) 縦に 3 枚並ぶ場合

$(1,\ 4,\ 7),\ (2,\ 5,\ 8),\ (3,\ 6,\ 9)$

の 3 通り．

(ii) 横に 3 枚並ぶ場合

$(1,\ 2,\ 3),\ (4,\ 5,\ 5),\ (7,\ 8,\ 9)$

の 3 通り．

(iii) 斜めに 3 枚並ぶ場合

$(1,\ 5,\ 9),\ (3,\ 5,\ 7)$

の 2 通り．

であるから，全部で，

$3+3+2=8$ (通り)

ある．これらすべての場合について，残りの 1 枚の選び方が 6 通りずつあるので，求める確率は，

$$\frac{8\cdot 6}{126}=\frac{8}{21} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(4) 4 枚のカードの中に 1 と 5 のカードが入っている場合は，1 と 5 以外の 7 枚のカードから残りの 2 枚のカードを選ぶ方法と考えて，

${}_7\mathrm{C}_2=21$ (通り) $\cdots\cdots$① だけあり，いずれも同じ確からしさで起こる． ←(注) 2

このうち,「ビンゴ」となるのは，

(i) 1 のカードのみが 1 列に並ぶ 3 枚のうちの 1 枚となる場合，

残りの 2 枚が，

$(2,\ 3),\ (4,\ 7)$

の 2 通り．

(ii) 5 のカードのみが 1 列に並ぶ 3 枚のうちの 1 枚となる場合，

残りの 2 枚が，

$(2,\ 8),\ (4,\ 6),\ (3,\ 7)$

の 3 通り．

(iii) 1 と 5 のカードがともに 1 列に並ぶ 3 枚のうちの 1 枚となる場合，

残りの 2 枚が，

$(*,\ 9)$ $\left(*\text{ は } 2,3,4,6,7,8 \text{ のいずれか}\right)$

の 6 通り．

であるから，全部で，

$$2+3+6=11\ (\text{通り}) \qquad \cdots\cdots②$$

あるので，求める確率は，

$$\frac{11}{21} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(5) 4 枚のカードが「ビンゴ」となる事象を E,

4 枚のカードの中に 1 と 5 のカードが含まれる事象を F とする．

求める確率は，

$$P_E(F)=\frac{P(E\cap F)}{P(E)} \qquad \cdots\cdots③$$

である．ここで (3) より，

$$P(E) = \frac{8}{21}$$

であり，② より，

$P(E \cap F) = \dfrac{11}{126}$ であるから，③ に代入して，

$$P_E(F) = \frac{\frac{11}{126}}{\frac{8}{21}} = \frac{11}{48}$$

である．

$\Big($ この問題には採点基準と採点例を提示します $\Big)$

(よい問題の解答は多様である＜確率のおしゃれな解答＞)

2017 年度中 3 模試大問 3 確率

$\boxed{4}$ 図 1，2 のような正方形，または，正方形を組み合わせた図形があり，各辺は同じ確からしさで赤か黒に塗られている．動点 P は点 A から出発して各図形の辺上を移動するが，赤く塗られた辺しか通ることができない．以下の問いに答えよ．答は結果のみではなく途中の考え方の筋道も記せ．

(1)　図 1 において，

(i)　正方形の各辺を赤か黒に塗り分ける方法は，全部で何通りあるか．

(ii)　動点 P が A → D → C の経路で点 A から点 C まで移動することができる確率．

(iii)　動点 P が点 A から点 C まで移動することができる確率．

(2)　図 2 において，

(i)　動点 P が点 A から点 D まで移動できる経路が A → F → E → B → C → D だけである確率．

(ii)　動点 P が点 A から点 D まで移動できる経路が A → B → E → D だけである確率．

(iii)　動点 P が点 A から点 D まで移動することができる確率．

図 1

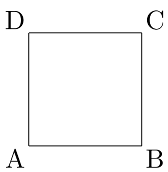
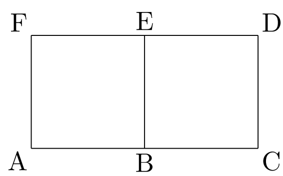


図 2



(解答)

(1)　(i)　辺は 4 本あり，各辺ごとに赤か黒かで 2 通りずつあるので，

$$2^4 = 16(\text{通り}) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(ii)　(i) で求めた 16 通りはすべて同じ確からしさで起こる．このうち，A → D → C と移動できるのは 2 辺 AD，DC がともに赤のときである．このような塗り方は，残りの 2 辺が赤か黒かを考えて 2^2 通りある．以上より求める確率は，

$$\frac{2^2}{16} = \frac{1}{4} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(iii)　動点 P が A → B → C の経路で点 A から点 C まで移動することができる場合も (ii) と同様に 2^2 通りある．また，A → D → C の経路と A → B → C の経路のどちらでも動点 P が点 A から点 C まで移動できるのはすべての辺が赤となる場合であり，そのような塗り方は 1 通りある．この場合が重複していることに注意して求める確率は，

$$\frac{2^2 + 2^2 - 1}{16} = \frac{7}{16} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) 2 図の場合 7 つの辺があるので，各辺を赤か黒で塗り分ける方法は 2^7 通りあってどれも同じ確からしさで起こる．

(i) 動点 P が点 A から点 D まで移動できる経路が A → F → E → B → C → D だけとなるのは，2 辺 AB と ED のみが黒，他の辺はすべて赤となるときに限り 1 通りだけである．

よって，求める確率は，

$$\frac{1}{2^7}=\frac{1}{128} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(ii) 動点 P が点 A から点 D まで移動できる経路が A → B → E → D だけとなるのは，

· 3 辺 AB，BE，ED は赤．

· 2 辺 AF，FE のうち少なくとも 1 辺が黒．　……①

· 2 辺 BC，CD のうち少なくとも 1 辺が黒．　……②

となるときである．① となるのは 2 辺 AF，FE がともに赤となる場合以外であるから，2^2-1 通りある．② についても同様であるから，全部で $(2^2-1)(2^2-1)$ 通りある．

よって，求める確率は，

$$\frac{(2^2-1)(2^2-1)}{2^7}=\frac{9}{128} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(iii)

$$\left\{\begin{array}{l}\text{動点 P が点 A から点 D まで A → F → E → D の経路で移動できる塗り方を X.}\\ \text{動点 P が点 A から点 D まで A → B → C → D の経路で移動できる塗り方を Y.}\\ \text{動点 P が点 A から点 D まで A → B → E → D の経路で移動できる塗り方を Z.}\end{array}\right.$$

とする．

X となる塗り方は 3 辺 AF，FE，ED が赤となる場合で，他の 4 辺が赤か黒かで 2^4 通りある．

Y となる塗り方は 3 辺 AB，BC，CD が赤となる場合で，他の 4 辺が赤か黒かで 2^4 通りある．

Z となる塗り方は 3 辺 AB，BE，ED が赤となる場合で，他の 4 辺が赤か黒かで 2^4 通りある．

「X かつ Y」となる塗り方は 5 辺 AF，FE，ED，AB，BC，CD が赤となる場合で，BE が赤か黒かで 2 通りある．

「X かつ Z」となる塗り方は 4 辺 AF，FE，ED，AB，BE が赤となる場合で，BC と CD が赤か黒かで 2^2 通りある．

「Y かつ Z」となる塗り方は 4 辺 AB，BC，CD，BE，ED が赤となる場合で，AF と FE が赤か黒かで 2^2 通りある．

「X かつ Y かつ Z」となる塗り方はすべての辺が赤となる場合で，1 通りである．

動点 P が点 A から点 D まで移動することができるのは「X または Y または Z」となる場合に，動点 P が点 A から点 D まで A → F → E → B → C → D の経路でのみ移動で

きる塗り方となる 1 通りを加えて，

$$(2^4+2^4+2^4-2^2-2^2-2+1)+1=40(\text{通り})$$

ある．以上より，求める確率は，

$$\begin{aligned}\frac{40}{2^7}&=\frac{40}{128}\\&=\frac{5}{16}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

$\Big($ (2) (iii) の別解 $\Big)$

「X または Y または Z」となる場合は次のように数えることもできる．

まず，

$$\begin{cases}\text{動点 P が点 A から点 D まで A} \to \text{F} \to \text{E} \to \text{D の経路で移動することを } x \\ \text{動点 P が点 A から点 D まで A} \to \text{B} \to \text{C} \to \text{D の経路で移動することを } y \\ \text{動点 P が点 A から点 D まで A} \to \text{B} \to \text{E} \to \text{D の経路で移動することを } z \end{cases}$$

と表す．動点 P が点 A から点 D まで移動する経路について，

(i) 経路が x のみとなる場合

·A $\to$ B が黒で残る 3 辺が赤か黒かで 2^3 通り．

A $\to$ B が赤で，B $\to$ D は黒，B $\to$ C と C $\to$ D の少なくとも一方が黒で 2^2-1 通り．

よって，

$$2^3+(2^2-1)=11(\text{通り})$$

(ii) 経路が y のみとなる場合

·E $\to$ D が赤か黒かで (i) と同様に場合に分けることにより，

11 通り

(iii) 経路が z のみとなる場合

(2)(ii) で数えた，

$$(2^2-1)(2^2-1)=9(\text{通り})$$

(iv) 経路が x と y のみとなる場合

B $\to$ E だけが黒で他はすべて赤となる場合の 1 通り．

(v) 経路が x と z のみとなる場合

B $\to$ C と C $\to$ D の少なくとも一方が黒で $2^2-1=3$ 通り．

(vi) 経路が y と z のみとなる場合

A $\to$ F と F $\to$ E の少なくとも一方が黒で $2^2-1=3$ 通り．

(vii) 経路が x と y と z となる場合

すべての辺が赤となる場合で 1 通り．

以上より，

$$11+11+9+1+3+3+1=39(\text{通り})$$

これに，A $\to$ F $\to$ E $\to$ B $\to$ C $\to$ D の経路でのみ移動できる 1 通りを加えて，

$$39+1=40(\text{通り})$$

となる．

(マニュアルには無くても大切なこと＜sup と inf＞)

(夏期講習 高 2 東大数学のテキストより)

$\boxed{5}$　次の（問題）に対する N 君の [解答] における誤りを指摘し，正しい答案を作れ．

(問題)　実数 x, y が,

$$\begin{cases} -1 < x + y < 1 & \cdots\cdots ① \\ -3 < x - y < 0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

を満たして変化するとき，$z = 3m + y$ のとり得る値の範囲を求めよ．

① + ② より，

$$-4 < 2x < 1$$

$$\therefore -2 < x < \frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots ③$$

② × (−1) より，

$$0 < -x + y < 3 \qquad \cdots\cdots ②'$$

① + ②′ より，

$$-1 < 2y < 4$$

$$\therefore -\frac{1}{2} < y < 2 \qquad \cdots\cdots ④$$

よって，③ × 3 + ④ より，

$$-\frac{13}{2} < 3x + y < \frac{7}{2} \qquad \cdots\cdots ⑤$$

が成り立つ．

　ゆえに，求める z のとりうる値の範囲は，

$$-\frac{13}{2} < z < \frac{7}{2} \qquad \cdots\cdots (答)$$

である．

(無茶な問題)

（啓林館アドバンスプラスより）

$\boxed{6}$ 次の無限級数の収束・発散を調べよ．

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots\cdots$$

(今年，話題になった話)

$\boxed{7}$ 「下に凸」の定義を述べたうえで，$y=x^3$ について，下に凸の区間を求めよ．